

Infos: Evaluation du cours: Globalement, bien!

→ retour en détail avec les commentaires jeudi

Rappels: $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq}$
 $\forall (x,y) \in B((\tilde{x}, \tilde{y}), \delta) \setminus \{(\tilde{x}, \tilde{y})\},$
 $|f(x,y) - l| \leq \varepsilon$
 $\forall (x,y) \text{ tq}$
 $0 < \|(x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\| < \delta$

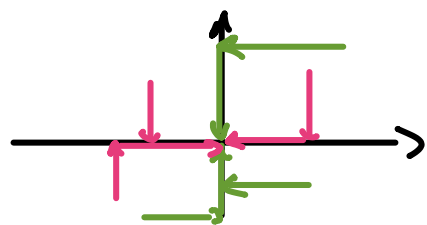
⚠ Comment trouver l ? Exemple 3.7 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

1^{ère} idée: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ et/or

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ idem } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} = 0$$

On trouve la même chose. $\Rightarrow$ limite existe : NON.

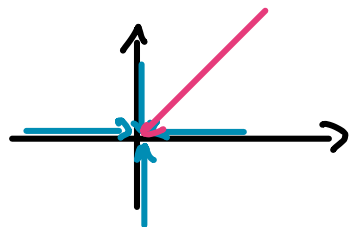


$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0}$$

Quid de venir le long d'une diagonale? ($x=y$ par exemple)

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$\rightarrow$ la limite ne peut pas exister.



$$\lim = 0$$

$$\lim = \frac{1}{2}$$

$\rightarrow$ la limite doit être la même quelle que soit la direction dont je m'approche de $(0,0)$

$$\nearrow_{\theta} f(t \cdot \cos \theta, t \cdot \sin \theta) \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi].$$

Si $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta)$ existe et ne dépend pas de θ

[pour $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = \cos \theta \sin \theta$
→ dépend de θ
la limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$
n'existe pas

la limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ existe ?

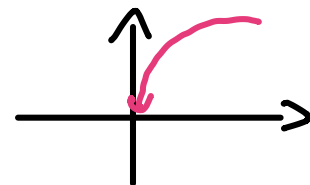
NON!

$$\text{Si } f(x, y) = \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \theta, t \sin \theta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{t^2 \cos^2 \theta + t^4 \sin^4 \theta}.$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + t^2 \sin^4 \theta} = 0$$



Par contre, $\lim_{t \rightarrow 0} f(\underline{t^2}, t)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Théorème 3.8 (Critère des deux germinaux dans $\mathbb{R}^n$)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie
 sur un voisinage de $\tilde{x}$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors,

→ analyse II

$\lim_{x \rightarrow \tilde{x}}$

$f(x) = l$ si et seulement si $\exists \delta > 0$, $\psi:]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tq

(i) $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r) = 0$, (ii) $\forall x \in B(\tilde{x}, \delta)$, $|f(x) - l| \leq \psi(\|x - \tilde{x}\|)$

← analyse I

§3.3 Limites de fonctions à 2 variables

Théorème 3.9 (Critère des 2 gendarmes en coordonnées polaires)

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(\tilde{x}, \tilde{y})$ et $l \in \mathbb{R}$. Alors,

$\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y) = l$ si et seulement si $\exists \delta > 0$, $\psi:]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$

t.q. (i) $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r) = 0$, (ii) $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $r \in]0, \delta[$,

$$|f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta) - l| \leq \psi(r)$$

(iii) ψ ne dépend pas de θ !

Méthode 3.10 (Discussion des limites dans $\mathbb{R}^2$)

On considère $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ def. au vge de $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Discutons la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y)$

Étape 1: Test des directions.

On fixe $\theta \in [0, 2\pi]$ et on calcule

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta)$$

Si la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y)$ n'existe pas $\rightarrow$ la limite $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta)$ n'existe pas

Si la limite $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta)$ existe, mais dépend de $\theta \rightarrow$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y)$ n'existe pas

Si la limite $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta)$ existe & ne dépend pas de $\theta \rightarrow$ étape 2.

Étape 2: Centre.

On cherche $l = \lim_{r \rightarrow 0^+} f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta)$

On estime $|f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta) - l| \leq \dots \leq \dots \leq \dots$

but des inégalités: faire disparaître θ .

$|f(\tilde{x} + r \cos \theta, \tilde{y} + r \sin \theta) - l| \leq \dots \leq \varphi(r)$ $r > 0 \leftarrow$ estimation fine

si $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$ & φ ne dépend pas de θ $r \leq 14 \leftarrow$ estimation générale

$\rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y) = l$ existe.

si on ne trouve pas de fonction $\varphi \rightarrow$ étape 3

Étape 3: trouve une façon de s'approcher de $(\tilde{x}, \tilde{y})$
qui donne un résultat différent de l .

i.e. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tq $\forall t > a, \gamma(t) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$,
 $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ & $\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma(t)) \neq l$.

→ Si on trouve cette courbe $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y)$ n'existe pas

→ Si on ne trouve pas de telle courbe → étape 2.

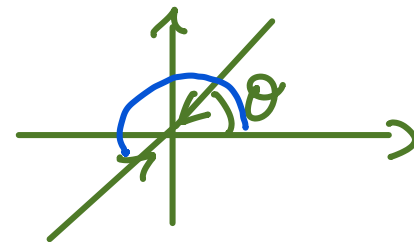
Exemples 3.11 (i) Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$f(x,y) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$. Discutons la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Étape 1: Test des directions.

$$\text{On a } \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos \theta \cos \left(\frac{1}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0^+ \\ \rightarrow 0}} r \cos \theta \underbrace{\cos \left(\frac{1}{r^2} \right)}_{\text{est borné}} = 0 := l \quad \checkmark$$



Étape 2: Contrôle.

$$\text{On a } |f(r \cos \theta, r \sin \theta) - l| = |f(r \cos \theta, r \sin \theta)|$$

→ doit disparaître!!

$$= r \cdot \underbrace{|\cos \theta|}_{\leq 1} \cdot \left| \cos \left(\frac{1}{r^2} \right) \right| \leq r \cdot \left| \cos \left(\frac{1}{r^2} \right) \right| := \varphi(r)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \left| \cos \left(\frac{1}{r^2} \right) \right| = 0. \quad \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

(ii) Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{2|x|}{x^2 + |x| + y^2}. \quad \text{Discutons } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

Étape 1: test des directions

On a

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r \cdot |\cos \theta|}{r^2 \cos^2 \theta + r \cdot |\cos \theta| + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot r \cdot |\cos \theta|}{r \cdot |\cos \theta| + r^2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot |\cos \theta|}{|\cos \theta| + r} = \begin{cases} 2 & \text{si } |\cos \theta| \neq 0 \\ 0 & \text{si } |\cos \theta| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La limite dépend de $\theta \rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2|x|}{x^2 + |x| + y^2}$ n'existe pas.

Théorème 3.12 (critère des 2 gendarmes en coordonnées elliptiques)

Sous les mêmes hypothèses que le thm 3.9 + soit $a, b > 0$.

Alors, $\lim_{(x,y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x,y) = l$

si et seulement si $\exists \delta > 0, \varphi :]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R} \text{ tq}$

(i) $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$, (ii) $\forall \theta \in [0, 2\pi], |f(\tilde{x} + a \cdot r \cdot \cos \theta, \tilde{y} + b \cdot r \cdot \sin \theta) - l| \leq \varphi(r)$

→ à utiliser quand on a des dénominateurs du style

$$\frac{\text{truc}}{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

Théorème 3.13 (Critère des deux gendarmes en coordonnées cartésiennes)
Sous les mêmes hyp. que le thm 3.9,

Si $\exists \delta > 0$, et $\varphi:]\tilde{x}-\delta, \tilde{x}+\delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tq

(i) $\lim_{x \rightarrow \tilde{x}} \varphi(x) = \varphi(\tilde{x}) = 0$

 ~~~~ $\varphi(\tilde{x}) = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in \mathcal{B}((\tilde{x}, \tilde{y}), \delta) \setminus \{(\tilde{x}, \tilde{y})\}$, $|f(x, y) - \ell| \leq \varphi(x)$

Alors, $\lim_{(x, y) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})} f(x, y) = \ell$

→ s'utilise à l'oeil

Exemple 3.16 : (i) Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3 - xy}{\sqrt{2x^2 + \frac{y^2}{4}}}$$

Discutons la limite
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

→ Coordonnées elliptiques, $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \theta, 2 r \sin \theta\right)$

Étape 1 : test des directions

$$\text{On a } \lim_{r \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \theta, 2 r \sin \theta\right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} r^3 \cos^3 \theta - \sqrt{2} r^2 \cos \theta \sin \theta}{r}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} r^2 \cos^3 \theta - \sqrt{2} r \cos \theta \sin \theta = 0 := l.$$

Étape 2 : crière.

$$\text{On a } \left| f\left(\frac{1}{\sqrt{2}} r \cos \theta, 2 r \sin \theta\right) - l \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} r^2 \cos^3 \theta - \sqrt{2} r \cos \theta \sin \theta \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} r^2 + 2r \quad \Phi = \psi(r)$$